Mooie Rechthoeken

Maarten Pennings

7 April 1993

1 Probleem

Een mooie rechthoek $a \times b$ wordt gedefinieerd als een rechthoek waarvan tenminste één zijde een geheeltallige lengte heeft $a \in \mathbf{N} \ \vee \ b \in \mathbf{N}$. De bewering is nu: als ik met mooie rechthoeken een nieuwe rechthoek bouw —laten we hopen dat "bouwen" begrepen wordt— dan is de nieuwe rechthoek ook weer mooi.

2 De oppervlakte integraal

Bij een rechthoek $a \times b$ gelegen in het platte vlak $\mathbf{R}^2$ met de linker onderhoek op (k, l) definieren we een oppervlakte integraal $\mathcal{I}$ alsvolgt

$$\mathcal{I}_{(k,l)}(a, b) = \int_k^{k+a} \int_l^{l+b} e^{2\pi i(x+y)} \, dx \, dy$$

Wat is nu de rol van deze integraal? Met het predikaat $\mathcal{M}(a, b) \equiv a \in \mathbf{N} \ \vee \ b \in \mathbf{N}$ voor mooi kunnen we dat bondig formuleren. Voor een rechthoek $a \times b$ geldt

$$\mathcal{M}(a, b) \ \equiv \ \forall_{k,l} \mathcal{I}_{(k,l)}(a, b) = 0$$

En dat zullen we in de volgende paragrafen aantonen.

3 Integreren

Even stug volhouden: een dubbele complexe integraal.

$$\begin{aligned}
& \mathcal{I}_{(k,l)}(a, b) \\
= \quad & \{ \text{ definitie } \mathcal{I} \ \} \\
& \int_k^{k+a} \int_l^{l+b} e^{2\pi i(x+y)} \, dx \, dy \\
= \quad & \{ \text{ uitvermenigvuldigen } \}
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{ll}
 & \int_k^{k+a} \int_l^{l+b} e^{2\pi i x + 2\pi i y}\, dx\, dy \\
= & \quad \{ \ \frac{d}{dx}\frac{1}{a} e^{ax+b} = e^{ax+b} \ \} \\
 & \int_k^{k+a} \left. \frac{1}{2\pi i} e^{2\pi i x + 2\pi i y} \right]_l^{l+b} dy \\
= & \quad \{ \text{ grenzen invullen } \} \\
 & \int_k^{k+a} \frac{1}{2\pi i} e^{2\pi i (l+b) + 2\pi i y} - \frac{1}{2\pi i} e^{2\pi i l + 2\pi i y}\, dy \\
= & \quad \{ \ \frac{d}{dx}\frac{1}{a} e^{ax+b} = e^{ax+b} \ \} \\
 & \left. \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i} e^{2\pi i (l+b) + 2\pi i y} - \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{2\pi i} e^{2\pi i l + 2\pi i y} \right]_k^{k+a} \\
= & \quad \{ \ i^2 = -1, \text{ herschikken } \} \\
 & \left. \frac{1}{4\pi^2} e^{2\pi i l + 2\pi i y} - \frac{1}{4\pi^2} e^{2\pi i (l+b) + 2\pi i y} \right]_k^{k+a} \\
= & \quad \{ \text{ grenzen invullen } \} \\
 & \left(\frac{1}{4\pi^2} e^{2\pi i l + 2\pi i (k+a)} - \frac{1}{4\pi^2} e^{2\pi i (l+b) + 2\pi i (k+a)} \right) - \left(\frac{1}{4\pi^2} e^{2\pi i l + 2\pi i k} - \frac{1}{4\pi^2} e^{2\pi i (l+b) + 2\pi i k} \right) \\
= & \quad \{ \text{ buiten haken halen, uitvermenigvuldigen } \} \\
 & \frac{1}{4\pi^2} \left(e^{2\pi i l + 2\pi i k + 2\pi i a} - e^{2\pi i l + 2\pi i b + 2\pi i k + 2\pi i a} - e^{2\pi i l + 2\pi i k} + e^{2\pi i l + 2\pi i b + 2\pi i k} \right) \\
= & \quad \{ \ e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \text{ buiten haken halen } \} \\
 & \frac{1}{4\pi^2} e^{2\pi i (l+k)} (e^{2\pi i a} - e^{2\pi i b + 2\pi i a} - e^{2\pi i 0} + e^{2\pi i b}) \\
= & \quad \{ \text{ herschikken } \} \\
 & -\frac{1}{4\pi^2} e^{2\pi i (l+k)} (e^{2\pi i b + 2\pi i a} - e^{2\pi i a} - e^{2\pi i b} + 1) \\
= & \quad \{ \text{ factoriseren } \} \\
 & -\frac{1}{4\pi^2} e^{2\pi i (l+k)} (e^{2\pi i a} - 1)(e^{2\pi i b} - 1)
\end{array}
$$

4 De relatie tussen $\mathcal{M}$ en $\mathcal{I}$

We frissen eerst even ons geheugen op. Hoe zat het ook al weer met zo'n exponent met een i erin?

Lemma complexe e-macht

$$
\begin{array}{ll}
 & e^{ix} = 1 \\
\equiv & \quad \{ \text{ wet } \} \\
 & \cos x + i \sin x = 1 + i0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\equiv & \quad \{ \text{ gelijkheid complexe getallen } \} \\
& \cos x = 1 \ \wedge \ i \sin x = 0 \\
\equiv & \quad \{ \text{ periodiek } \} \\
& x = 0 \pmod{2\pi} \ \wedge \ x = 0 \pmod{\pi} \\
\equiv & \quad \{ \text{ doorsnede } \} \\
& x = 0 \pmod{2\pi}
\end{array}
$$

$\square$

Dat betekent dat we een alternatieve formulering hebben voor $\mathcal{M}$. Immers,

$$
\begin{array}{ll}
& e^{2\pi i x} - 1 = 0 \\
\equiv & \quad \{ \text{ lemma complexe } e\text{-macht } \} \\
& 2\pi x = 0 \pmod{2\pi} \\
\equiv & \quad \{ \text{ delen } \} \\
& x = 0 \pmod{1} \\
\equiv & \quad \{ \ x \geq 0 \ \} \\
& x \in \mathbf{N}
\end{array}
$$

dus

$$
\begin{array}{ll}
& \mathcal{M}(a, b) \\
\equiv & \quad \{ \text{ def } \} \\
& a \in \mathbf{N} \ \vee \ b \in \mathbf{N} \\
\equiv & \quad \{ \text{ als hierboven } \} \\
& e^{2\pi i a} - 1 = 0 \ \vee \ e^{2\pi i b} - 1 = 0 \\
\equiv & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
& (e^{2\pi i a} - 1)(e^{2\pi i b} - 1) = 0 \\
\equiv & \quad \{ \text{ verzwakking; } K \in \mathbf{R} - \{0\} \ \} \\
& K(e^{2\pi i a} - 1)(e^{2\pi i b} - 1) = 0
\end{array}
$$

Dus, $\mathcal{M}(a, b) \equiv K(e^{2\pi i a} - 1)(e^{2\pi i b} - 1) = 0$ voor elke $K \in \mathbf{R} - \{0\}$, in het bijzonder voor $K = -\frac{1}{4\pi^2} e^{2\pi i (l+k)}$. Dat betekent dus dat $\mathcal{M}(a, b) \Rightarrow \mathcal{I}_{(k,l)}(a, b) = 0$ voor elke $k, l \in \mathbf{R}$: *de positie van de rechthoek is niet van invloed op het nul-zijn van de oppervlakte integraal.* Deze observatie mistte ik in Alfo Melisses mondelinge toelichting. We schrijven dus liever $\mathcal{I}(a, b)$ in plaats van $\mathcal{I}_{(k,l)}(a, b)$:

$$
\mathcal{M}(a, b) \ \equiv \ \mathcal{I}(a, b) = 0
$$

5 Invariant

Zolang we alleen maar mooie (in de zin van $\mathcal{M}$) rechthoeken leggen, zal elke der oppervlakte integralen $\mathcal{I}$ van deze rechthoeken 0 zijn. De *som* van deze oppervlakte integralen is dus ook nul.

Zogauw de rechthoeken samen één grote rechthoek vormen, is bovengenoemde som precies gelijk aan de oppervlakte intergaal $\mathcal{I}$ van deze grote rechthoek daar integratie distibueert over sommatie, en de posities van de rechthoeken niet van invloed zijn op het nul-zijn. Dus de oppervlakte integraal van de grote rechthoek is nul en dus is hij $\mathcal{M}$.

6 Variant

Twee variaties liggen voor de hand. Ten eerste is $e^{\frac{2\pi i}{d}x} - 1 = 0$ equivalent met $x = 0 \pmod d$ ofwel $x \in d\mathbf{N}$ (met natuurlijk $d\mathbf{N} = \{dn \mid n \in \mathbf{N}\}$). We kunnen dan over d-mooi spreken; een rechthoek $a \times b$ is d-mooi als $\mathcal{M}_d(a, b)$ geldt met $\mathcal{M}_d(a, b) \equiv a \in d\mathbf{N} \ \vee \ b \in d\mathbf{N}$. En de stelling is dan natuurlijk: een rechthoek samengesteld uit d-mooie rechthoeken is weer d-mooi.

De tweede variatie is doortrekking naar $\mathbf{R}^3$. We kunnen mooie balken $a \times b \times c$ beschouwen; $\mathcal{M}(a, b, c) = a \in \mathbf{N} \ \vee \ b \in \mathbf{N} \ \vee \ c \in \mathbf{N}$ en de inhouds-integraal wordt natuurlijk $\mathcal{I}_{k,l,m}(a, b, c) = \int_k^{k+a} \int_l^{l+b} \int_m^{m+c} e^{2\pi i(x+y+z)}\, dx\, dy\, dz$. Doortrekken naar $\mathbf{R}^1$ leidt dan tot een simpeler probleem dat wellicht sneller is uit te leggen, maar niet echt een uitdaging biedt.

7 Dank

Met dank aan Alfo Melisse voor het mailen van deze opgave en, daar zal ik maar eerlijk in zijn, voor het doorbellen van de oplossing. Remco Bouckaert had in de gaten dat de posities van de rechthoeken roet in het eten gooiden, maar gelukkig bleek Alfo's oppervlakte integraal hiertegen bestand. De tweede variatie komt ook van Remco. Verder dank ik Piet van Oostrum voor het instaleren van de euler (wiskunde) en concrete (broodtekst) fonts waarin dit verhaaltje is gezet.