Coca Colisch probleem

Maarten Pennings V6-3

1983 oktober

overgetiept 2008 juli 10 (correcties 31 juli 2008, postscriptum 2008 augustus 19)

Samenvatting

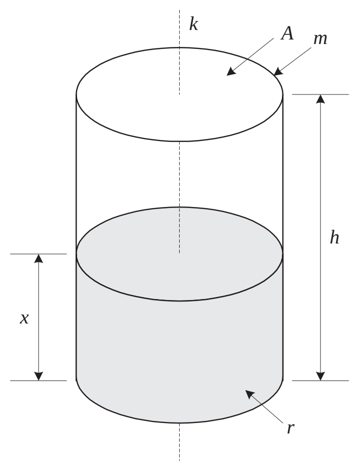
Dit artikel beschrijft een puzzel en de oplossing ervan. De puzzel werd me gesteld door mijn natuurkunde leraar (De Bruyn). Ik loste de puzzel op (en ontdekte daarbij een tweede puzzel), waarna een vriendje van mij (Steven Ralston), die in de schoolkrant redactie zat, voorstelde de puzzel en oplossing in de schoolkrant op te nemen. Ik stemde toe, naar later bleek, tot grote ergernis van vele medeleerlingen.[1]

In juli 2008 heb ik de *Palet*, 1$^{\text{e}}$ nummer, jaargang 1983, van de zolder gehaald en het artikeltje over getiept. Ik heb geprobeerd de originele tekst te volgen (en dat is me bijna overal gelukt...). Dat is wat U nu gaat lezen.

In Augustus 2008 heb ik nog een postscriptum toegevoegd.

1 De puzzel

Een voorwerp, bijvoorbeeld een Coca Cola blikje, wordt gevuld met een of andere vloeistof, bijvoorbeeld Coca-Cola. Van het te vullen voorwerp, voortaan *blikje* genoemd, is de massa m, de hoogte h, en het grondoppervlak A. De stof waarmee het blikje gevuld wordt, voortaan *Cola* genoemd, heeft een bekende dichtheid ρ.



De vraag is nu

[1]Nu snap ik best dat wis- en natuurkunde problemen niet zo goed passen in een schoolkrant. Maar toch vraag ik wat compassie voor mijn artikel: naast het standaard spul als notulen leerlingenraad, "gehoord"(uitspraken docenten), ingezonden stukjes, klachten over de schoolkrant, cartoons, schoolzaken (gebeurtenissen, sport, nieuwe lessen, bibliotheek, werkweek, clubs), interview, memo dekanen, gedichten, bijzondere leerlingen, puzzel, tekoop, ouderraad, agenda, stonden ook de volgende artikelen in Palet 6: Medianota kabinet Lubbers, NVSH in Maastricht, Rutgers stichting, Bestrijding van plagen en de effecten op de voedselketen, vier Engelse opstellen, en 6 pagina's over De Joden en de Sovjetrussische politiek.

Wanneer is het zwaartepunt van het blikje op zijn laagst,
dat wil zeggen, bij welke vulhoogte van de Cola?

Duidelijk zal zijn dat als het blikje geen Cola bevat, het zwaartepunt van het "geheel" precies in het midden ligt, en wel op $\frac{1}{2}h$ van de bodem van het blikje (op een lijn k door de middelpunten van deksel en bodem).

Als het hele blikje met Cola gevuld is, ligt het zwaartepunt van het geheel weer precies in het midden. Het zwaartepunt van het blikje en de Cola vallen dan samen.

Alleen als het blikje gedeeltelijk met Cola is gevuld, ligt het zwaartepunt lager.

Als de afstand tussen de bodem en het Cola-oppervlak x is, dan wordt de vraag dus: bij welke x ligt Z (het zwaartepunt van het geheel) op z'n laagst.

2 De formule

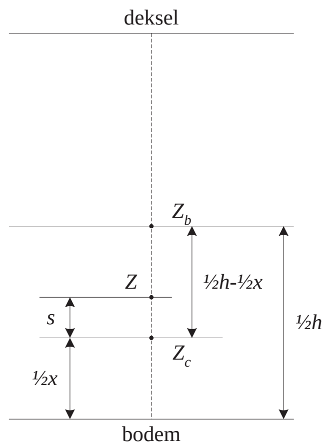
Het *zwaartepunt van het blikje* Z_b ligt op lijn k en wel op $\frac{1}{2}h$ vanaf de bodem.
De *zwaartekracht op het blikje* $F_{zb} = m \cdot g$.

Het *zwaartepunt van de Cola* Z_c ligt op lijn k en wel op $\frac{1}{2}x$ vanaf de bodem.
De *zwaartekracht op de Cola* $F_{zc} = \rho \cdot A \cdot x \cdot g$.

Waar ligt nu het totale zwaartepunt (Z)? Hiertoe gaan we het voorgaande beeld schematiseren door de twee zwaartepunten (Z_b en Z_c) elk aan weerszijde van een massaloze stang te denken. Het geheel is dan in evenwicht als de zwaartekracht aan de ene kant, vermenigvuldigd met de afstand tot Z, gelijk is aan de zwaartekracht aan de andere kant, vermenigvuldigd met de afstand tot Z. In formule

$$F_{zb} \cdot Z_bZ = F_{zc} \cdot Z_cZ$$

Als we de afstand van het zwaartepunt van de Cola (Z_c) tot het zwaartepunt (Z) nu s noemen,



dan wordt dit

$$F_{zb} \cdot (Z_bZ_c - s) = F_{zc} \cdot s$$

Aangezien de afstand Z_bZ_c gelijk is aan $\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}x$ (Z_c is immers lager dan Z_b) kunnen we afleiden

$$
\begin{array}{ll}
 & F_{zb} \cdot (Z_b Z_c - s) = F_{zc} \cdot s \\
= & \quad \{ \ Z_b Z_c \text{ gelijk is aan } \tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{2}x \ \} \\
 & F_{zb} \cdot (\tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{2}x - s) = F_{zc} \cdot s \\
= & \quad \{ \text{ invullen zwaartekrachten } \} \\
 & mg(\tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{2}x - s) = \rho A x g s \\
= & \quad \{ \text{ afsplitsen } s \ \} \\
 & mg(\tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{2}x) - mgs = \rho A x g s \\
= & \quad \{ \ s \text{ groeperen } \} \\
 & mg(\tfrac{1}{2}h - \tfrac{1}{2}x) = (\rho A x g + mg)s \\
= & \quad \{ \text{ delen } \} \\
 & s = \dfrac{mg(\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}x)}{\rho A x g + mg} \\
= & \quad \{ \ g \text{ wegstrepen } \} \\
 & s = \dfrac{m(\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}x)}{\rho A x + m}
\end{array}
$$

Voor de hoogte Z geldt $Z = s + \frac{1}{2}x$ ofwel

$$Z = \frac{m(\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}x)}{\rho A x + m} + \frac{1}{2}x$$

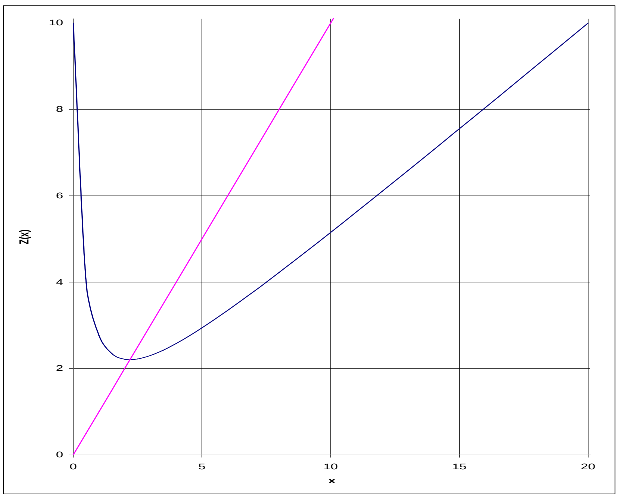
3 Voorbeeld

De hoogte van het zwaartepunt van het geheel (Z) is dus een functie van de vulhoogte x van de Cola

$$Z(x) = \frac{m(\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}x)}{\rho A x + m} + \frac{1}{2}x$$

Stel dat $m = 25g$, $h = 20cm$, $A = 80cm^2$, en $\rho = 1,0g/cm^3$, dan

$$Z(x) = \frac{25(\frac{1}{2}20 - \frac{1}{2}x)}{1,0 \cdot 80x + 25} + \frac{1}{2}x = \frac{250 - 12\frac{1}{2}x}{80x + 25} + \frac{1}{2}x$$



Uit de grafiek is af te lezen dat er een minimum is voor $x_{min} \approx 2,2cm$. De hoogte van het zwaartepunt is ook ongeveer $2,2cm$.

$$\text{min: } Z(2,2) = 2,2$$

We willen nu nog twee dingen. Ten eerste wat is de exacte waarde van x_{min} voor het laagste zwaartepunt en ten tweede is het toeval dat $x_{min} = Z(x_{min})$?

4 Exact minimum

Om het minimum te bepalen moeten we de afgeleide van $Z(x) = \frac{m(\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}x)}{\rho Ax + m} + \frac{1}{2}x$ bepalen. We maken daarbij gebruik van de quotient regel.

$$\begin{array}{ll}
 & Z'(x) \\
= & \quad \{ \text{ quotient regel } \} \\
 & \dfrac{(\rho Ax + m)(-\frac{1}{2}m) - m(\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}x)(\rho A)}{(\rho Ax + m)^2} + \dfrac{1}{2} \\
= & \quad \{ \text{ uitvermenigvuldigen } \} \\
 & \dfrac{-\frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m\rho Ax - \frac{1}{2}m\rho Ah + \frac{1}{2}m\rho Ax}{\rho^2A^2x^2 + 2\rho Axm + m^2} + \dfrac{1}{2} \\
= & \quad \{ \text{ twee termen vallen weg, } -\tfrac{1}{2}m \text{ buiten haakjes } \} \\
 & \dfrac{-\frac{1}{2}m(m + h\rho A)}{\rho^2A^2x^2 + 2\rho Axm + m^2} + \dfrac{1}{2}
\end{array}$$

Voor het minimum van $Z(x)$ geldt dat $Z'(x) = 0$ ofwel

$$\begin{array}{ll}
 & Z'(x) = 0 \\
= & \quad \{ \text{ zie vorige afleiding } \} \\
 & \dfrac{-\frac{1}{2}m(m + h\rho A)}{\rho^2A^2x^2 + 2\rho Axm + m^2} + \dfrac{1}{2} = 0 \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
 & -\dfrac{1}{2}m(m + h\rho A) = -\dfrac{1}{2}(\rho^2A^2x^2 + 2\rho Axm + m^2) \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
 & m(m + h\rho A) = \rho^2A^2x^2 + 2\rho Axm + m^2 \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
 & \rho^2A^2x^2 + 2\rho Amx - h\rho Am = 0 \\
= & \quad \{ \text{ } abc\text{-formule } \} \\
 & x_{1,2} = \dfrac{-2\rho Am \pm \sqrt{4\rho^2A^2m^2 + 4\rho^3A^3hm}}{2\rho^2A^2} \\
= & \quad \{ \text{ } 2\rho A \text{ wegstrepen } \} \\
 & x_{1,2} = \dfrac{-m \pm \sqrt{m^2 + \rho Ahm}}{\rho A} \\
\Rightarrow & \quad \{ \text{ positieve hoogte } \} \\
 & x_{min} = \dfrac{-m + \sqrt{m^2 + \rho Ahm}}{\rho A}
\end{array}$$

In ons voorbeeld ($m = 25g$, $h = 20cm$, $A = 80cm^2$, en $\rho = 1,0g/cm^3$) vinden we dan

$$x_{min} = \frac{-m + \sqrt{m^2 + \rho Ahm}}{\rho A} = \frac{-25 + \sqrt{625 + 1 \cdot 80 \cdot 20 \cdot 25}}{80} = \frac{-25 + \sqrt{40625}}{80} \approx 2,2069555$$

en ook

$$Z(x_{min}) \approx 2,2069555$$

5 Is $x_{min} = Z(x_{min})$

We draaien de zaak om, en onderzoeken voor welke x geldt $Z(x) = x$.

$$\begin{array}{ll}
 & Z(x) = x \\
= & \quad \{ \text{ definitie } Z(x) \text{ } \} \\
 & \dfrac{m(\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}x)}{\rho Ax + m} + \dfrac{1}{2}x = x \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
 & \dfrac{\frac{1}{2}(mh - mx)}{\rho Ax + m} = \dfrac{1}{2}x \\
= & \quad \{ \text{ calculus } \} \\
 & mh - mx = x(\rho Ax + m) \\
= & \quad \{ \text{ herschikken } \} \\
 & \rho Ax^2 + 2mx - mh = 0 \\
= & \quad \{ \text{ } abc\text{-formule } \} \\
 & x_{1,2} = \dfrac{-2m \pm \sqrt{4m + 4\rho Amh}}{2\rho A} \\
= & \quad \{ \text{ 2 wegstrepen } \} \\
 & x_{1,2} = \dfrac{-m \pm \sqrt{m + \rho Amh}}{\rho A}
\end{array}$$

We zien dat $Z(x) = x$ alleen dan optreedt als $x = x_{min}$. Hieruit volgt dus, dat als er zoveel Cola in het blikje is gedaan dat Z op zijn laagst is, deze Z ligt op het snijpunt van het vloeistofoppervlak en de lijn k.

6 Postscriptum (toegevoegd 2008)

Alex Sedzin, een collega van mij, was ook geintrigeerd door het feit dat het laagste zwaartepunt samenvalt met de vloeistofspiegel. Om het geheel wat inzichtelijker te maken stelde hij voor de massaloze stang met gewichten uit hoofdstuk 2 te tekenen als een “wip” met “schijfjes” Cola.

In de onderstaande plaatjes correspondeert de linkerkant van de wip met de bodem van het blikje. Daar liggen dus de schijfjes Cola. Het draaipunt van de wip is het zwaartepunt van het geheel.

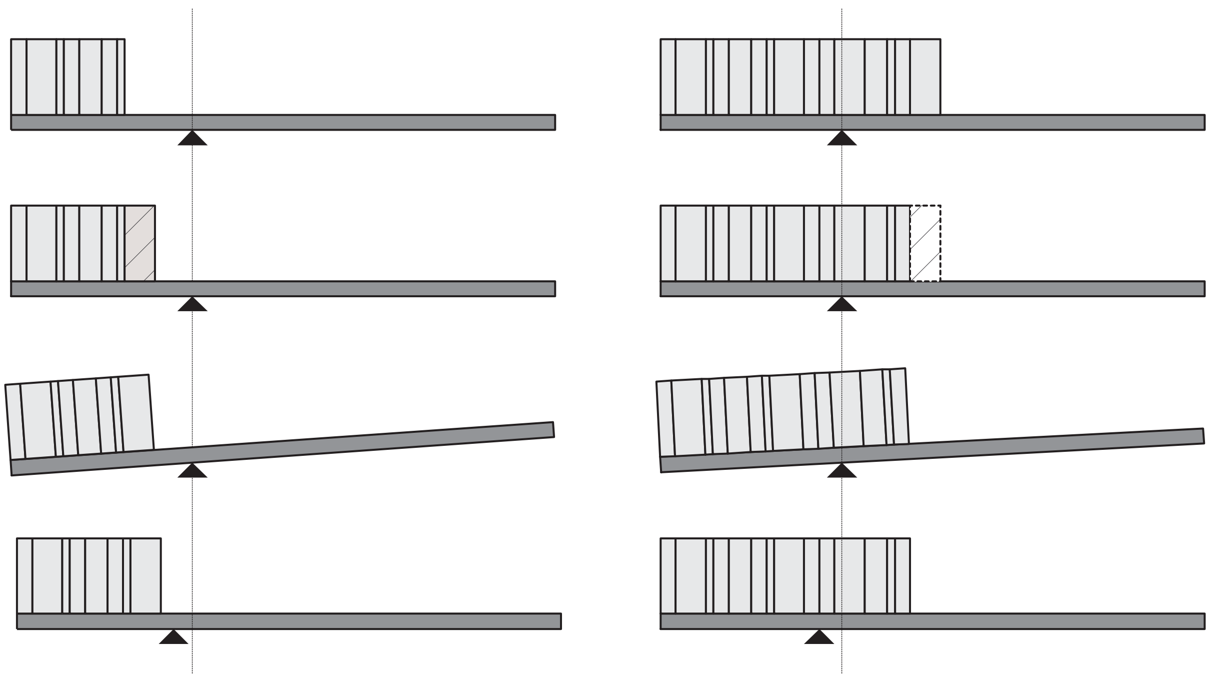
Er zijn nu verschillende scenario’s.

- **Onderspiegel**: de vloeistofspiegel is *lager* dan het draaipunt van de wip.
  Zie de linker vier plaatjes.

We kunnen dan wat Cola in het blikje gieten (er komt een schijfje Cola op de wip). Het schijfje kunnen we altijd zo dun maken dat het niet voorbij het draaipunt komt (2e plaatje van boven). Het evenwicht wordt nu verstoort (3e plaatje van boven): de balans is aan de linker kant (bodem kant) zwaarder geworden. Om dat te corrigeren moet het draaipunt ook naar links (4e plaatje).
Kortom, bij onderspiegel gaat het gezamelijke zwaartepunt omlaag als we Cola bij gieten.

- **Overspiegel**: de vloeistofspiegel is *hoger* dan het draaipunt van de wip.
  Zie de rechter vier plaatjes.
  We kunnen dan wat Cola uit het blikje halen (er verdwijnt een schijfje Cola van de wip). Het schijfje kunnen we altijd zo dun maken dat het niet voorbij het draaipunt komt (2e plaatje van boven). Het evenwicht wordt nu verstoort (3e plaatje van boven): de balans is aan de rechter kant (deksel kant) lichter geworden. Om dat te corrigeren moet het draaipunt weer naar links (4e plaatje).
  Kortom, bij overspiegel gaat het gezamelijke zwaartepunt omlaag als we Cola afgieten.

- **Gelijkspiegel**: de vloeistofspiegel is *gelijk* aan het draaipunt van de wip.



In de eerste twee scenario's geldt dus dat we het gezamelijke zwaartepunt verder kunnen verlagen. Alleen in het derde scenario lukt dat niet. Dit is een natuurkundige verklaring voor het wiskundige bewijs van het feit dat het laagste zwaartepunt samenvalt met de vloeistofspiegel.

(einde doc)